Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 7 im Wintersementer 2020/21 (am 11.12.20)

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	Verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
Vorlesung x, y.z	Verweist auf den Abschnitt y.z im Text zu Vorlesung x.

Grundlegende Ergebnisse zur Theorie der linearen algebraischen Gruppen

9 Kerne und Bilder von Homomorphismen von algebraischen Gruppen

Als nächstes wollen wir zeigen, daß der Kern und das Bild eines Homomorphismus von algebraischen Gruppen selbst algebraische Gruppen sind. Wir benötigen dafür zwei vorbereitende Aussagen.

9.1 Das Produkt zweier dichter offener Teilmengen

Seien G eine algebraische Gruppe und

$$U, V \subseteq G$$

zwei offene Teilmengen, welche in G dicht liegen. Dann gilt

$$U\cdot V = G.$$

Beweis. Sei $x \in G$. Dann ist außer U und V auch $x\cdot V^{-1}$ eine dicht liegende offene Teilmenge von G. Deshalb ist der Durchschnitt von $x\cdot V^{-1}$ und U nicht leer, sagen wir

$$y \in U \cap x\cdot V^{-1}.$$

Insbesondere gibt es ein $z \in V$ mit

$$U \ni y = x\cdot z^{-1},$$

d.h. es ist

$$x = y\cdot z \in U\cdot V.$$

QED.

9.2 Kriterium für die Abgeschlossenheit einer Untergruppe

Seien G eine algebraische Gruppe und

$$H \subseteq G$$

eine (nicht notwendig algebraische) Untergruppe. Dann gilt.

(i) Die Abschließung $\bar{H}$ von H ist eine Untergruppe.

(ii) H ist abgeschlossen in G, falls es eine nicht-leere offene Teilmenge U von $\bar{H}$ gibt,

$$\emptyset \ne U \subseteq \bar{H} \text{ und U offen in } \bar{H},$$

mit $U \subseteq H$.

Beweis. Zu (i). Für $x \in G$ gilt

$$H = x\cdot H \subseteq x\cdot \bar{H}.$$

Weil $x\cdot \bar{H}$ abgeschlossen ist, folgt $\bar{H} \subseteq x\cdot \bar{H}$, also $x^{-1}\cdot\bar{H} \subseteq \bar{H}$. Weil letzteres für jedes $x\in G$ gilt, folgt

$$H\bullet \overline{H} \subseteq \overline{H}.$$

Für $x \in \overline{H}$ gilt damit $H\bullet x \subseteq \overline{H}$, also $H \subseteq \overline{H}\bullet x^{-1}$. Weil $\overline{H}\bullet x^{-1}$ abgeschlossen ist, folgt

$$\overline{H} \subseteq \overline{H}\bullet x^{-1}$$

also

$$\overline{H}\bullet x \subseteq \overline{H} \text{ für jedes } x \in \overline{H},$$

also

$$\overline{H}\bullet\overline{H} \subseteq \overline{H}.$$

Wir haben gezeigt, $\overline{H}$ ist multiplikativ abgeschlossen. Weil der Übergang zum Inversen ein Automorphismus von G ist, gilt,

$$\overline{H}^{-1} = \overline{H^{-1}} = \overline{H}.$$

Damit ist $\overline{H}$ eine Untergruppe von G.

Zu (ii). Mit U ist auch die folgende Vereinigung von Verschiebungen von U offen in $\overline{H}$:

$$(H \subseteq) \quad \bigcup_{x\in H} x\bullet U \quad (\subseteq H\}$$

Man beachte, die rechte Inklusion besteht wegen $U \subseteq H$ und weil H eine Gruppe ist. Die linke besteht weil sich jedes $x \in H$ in der Gestalt $x = x\bullet y^{-1}\bullet y$ schreiben läßt mit $y\in U \subseteq H$, also $x\bullet y^{-1} \in H$. Wir haben gezeigt, H ist offen (und trivialerweise dicht) in $\overline{H}$. Wie gerade gesehen haben (vgl. 9.1) gilt damit

$\overline{H} = H\bullet H = H$,

wobei das Gleichheitszeichen rechts gilt, weil H eine Grupe ist. Damit ist $H = \overline{H}$ abgeschlossen in G.

QED.

9.3 Bild und Kern eines Homomorphismus von algebraischen Gruppen

Sei ϕ: G $\longrightarrow$ G' ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen. Dann gilt:

(i) Ker(ϕ) ist ein abgeschlossener Normalteiler von G.

(ii) Im(ϕ) ist ein abgeschlossene Untergruppe von G.

(iii) $\phi(G^0) = \phi(G)^0$.

Beweis. Zu (i). Als Kern eines Gruppen-Homomorphismus, ist Ker(φ) ein Normalteiler.

Als reguläre Abbildung und φ stetig. Deshalb sind die vollständigen Urbilder von einelementigen Teilmengen von G' abgeschlossen. Insbesondere ist dies für Ker(ϕ) der Fall.

Zu (ii). Weil ϕ eine reguläre Abbildung ist, enthält Im(ϕ) eine offene Teilmenge der Abschließung $\overline{\mathrm{Im}(\varphi)}$ (nach 1.9.5). Nach dem gerade bewiesenen Kriterium für Abgeschlossenheit ist Im(φ) abgeschlossen.

Zu (iii). Nach (ii) ist $\varphi(G^0)$ eine abgeschlossene Teilmenge der algebraischen Gruppe $\varphi(G)$. Mit G^0 ist auch $\varphi(G^0)$ zusammenhängend und enthält die Eins. Damit gilt aber

$$\varphi(G^0) \subseteq \varphi(G)^0$$

(weil jede zusammenhängende Teilmenge in einer Zusammenhangskomponente liegt). Wir haben nocht die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Nach dem Satz von der Komponente der Eins ist der Index von G^0 in G endlich. Der Homomoprhismus φ induziert eine Surjektion

$$G/G^0 \twoheadrightarrow \phi(G)/\phi(G^0).$$

Damit ist auch der Index von $\phi(G^0)$ in $\phi(G)$ endlich. Nach dem Satz von der Komponente der Eins folgt

$$\varphi(G)^0 \subseteq \phi(G^0).$$

QED.

Wie wir wissen sind schon in den einfachsten Fällen Irreduzibiliätsfragen in hohem Maße nicht-trivial (zum Beispiel die Frage noch der Irreduziblität eines Polynoms). Im Fall von algebraischen Gruppen ist die Frage nach der Irreduziblität äquivalent nach der des Zusammenhangs. Wir geben deshalb nachfolgend ein Kriterium für zusammenhängende Untergruppen an, welches zwar etwas technisch aussieht , in vielen Fällen aber sehr nützlich ist (siehe die Aufgaben 2.2.9).

9.4 Kriterium für zusammenhängende Untergruppen

Seien G eine algebraische Grupppe und

$$\{\varphi_i: X_i \longrightarrow G\}_{i\in I}$$

ein Familie von regulären Abbildungen mit folgenden Eigenschaften.
1. Jedes X_i ist eine irreduzible algebraische Varietät.
2. Jedes $Y_i := \varphi_i(X_i)$ enthält das neutrale Elemente $e \in G$.

Wir bezeichnen mit

$$H$$

die kleinste abgeschlossene Untergruppe von G, welche jedes Y_i enthält.[1] Dann gilt:

(i) H ist zusammenhängend.

(ii) Es gibt endlich viele Elemente $i_1,...,i_r \in I$ der Index-Menge I und endlich viele Vorzeichen $\varepsilon_1, ... , \varepsilon_r \in \{\pm 1\}$ mit

$$H = Y_{i_1}^{\varepsilon_1} \bullet ... \bullet Y_{i_r}^{\varepsilon_r}.$$

Beweis. Wir können die Familie der φ_i so erweitern, daß mit jedem Y_i auch Y_i^{-1} zur Familie der Y_i gehört. Dadurch vereinfachen sich die benötigten Bezeichnungen dahingehend, daß wir von allen ε_i annehmen können, daß sie gleich 1 sind. Für jedes Tupel

$$a = (a(1), ... , a(n)) \in I^n$$

von Elementen aus I setzen wir

$$Y_a := Y_{a(1)} \bullet ... \bullet Y_{a(n)}.$$

Als Bild eines direkten Produkts irreduzibler Varietäten bei einer regulären Abbildund ist

Y_a irreduzibel für jedes Tupel a von Elementen aus I.

Nach Definition gilt

$Y_b \bullet Y_c = Y_{(b,c)}$ für je zwei Tupel b und c von Elementen aus I,

---

[1] d.h. H ist die Abschließung der von den Y_i erzeugten Untergruppe von G, d.h. der Durchschnitt aller abgeschlossenen Untergruppen von G, die sämtliche Y_i enhalten.

wobei (b,c) das Tupel ist, dessen Koordinaten die von b gefolgt von den Koordinaten von c sind. Wie im Beweis des Kriteriums für die Abgeschlossenheit einer Untergruppe (9.2 (i)) sieht man, es gilt

$$\overline{Y}_b \cdot \overline{Y}_c \subseteq \overline{Y_{(b,c)}} \text{ für je zwei Tupel b und c von Elementen aus I.}$$

Die Dimension der $\overline{Y}_a \subseteq G$ ist durch die Dimension von G beschränkt. Es gibt deshalb ein Tupel a, für welches die Dimension von $\overline{Y}_a$ maximal wird,

$$\dim \overline{Y}_a \text{ ist maximal für das Tupel a von Elementen von I.}$$

Für jedes Tupel b gilt

$$\overline{Y}_a \subseteq \overline{Y}_a \cdot \overline{Y}_b \subseteq \overline{Y_{(a,b)}}. \qquad (1)$$

Dies ist eine Inklusion von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen, deren Dimension nach Wahl von a gleich ist. Deshalb gilt (nach 1.8.2)

$$\overline{Y}_a = \overline{Y_{(a,b)}} \supseteq \overline{Y}_b \text{ für jedes Tupel b von Elementen aus I.} \qquad (2)$$

Zusammen mit (1) für b = a ergibt sich, daß

$$\overline{Y}_a \text{ multiplikativ abgeschlossen}$$

ist. Weil der Übergang zum Inversen ein Automorphismus von G ist und weil mit jedem Y_i auch Y_i^{-1} zu unserer Familie gehört, überführt dieser Automorphismus jede Menge der Gestalt Y_b in eine Menge eben dieser Gestalt und damit jede Menge der Gestalt $\overline{Y}_b$ in eine Menge derselben Gestalt. Wegen (2) liegen damit alle Mengen der Gestalt $(\overline{Y}_b)^{-1}$ in $\overline{Y}_a$. Insbesondere ist

$$(\overline{Y}_a)^{-1} \subseteq \overline{Y}_a.$$

Zusammen ergibt sich, daß

$$\overline{Y}_a \text{ eine Untergruppe von G}$$

ist.

Nach Konstruktion ist $\overline{Y}_a$ die kleinste abgeschlossene Untergruppe von G, welche die Menge Y_a enthält. Wegen (2) ist $\overline{Y}_a$ die kleinste abgeschlossene Untergruppe von G, welche alle Mengen Y_b enthält. Es gilt also

$$\overline{Y}_a = H,$$

d.h. es gilt (i).

Weil Y_a das Bild einer regulären Abbildung ist, gibt es eine offene Teilmenge von $\overline{Y}_a$, welche vollständig in Y_a liegt (nach 1.9.5). Wie wir oben gesehen haben, folgt

$$Y_a \cdot Y_a = \overline{Y}_a$$

(nach 9.1). Insbesondere gilt (ii).
QED.

9.5 Folgerung: das Erzeugnis einer Familie zusammenhängender Untergruppen

Seien G eine algebraische Gruppe und $\{H_i\}_{i\in I}$ eine Familie von abgeschlossenen zusammenhängende Untergruppen. Dann ist das Erzeugnis

$$H = \langle H_i \mid i \in I \rangle$$

dieser Untergruppen abgeschlossen und zusammenhängend, und es gilt

$$H = H_{i_1} \bullet ... \bullet H_{i_r}$$

für endlich viele geeignet gewählte Indizes $i_1,..., i_r \in I$.

Beweis. Man wende die gerade bewiesene Aussage auf die Familie der natürlichen Einbettungen $H_i \hookrightarrow G$ an.

QED.

9.6 Folgerung: Kommutator-Untergruppen

Seien G ein algebraische Gruppe und

$$H, K \subseteq G$$

zwei abgeschlossene Untergruppen. Bezeichne

$$(H, K) := \langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x \in H, y \in K \rangle$$

die von den Kommutatatoren erzeugte Untergruppe von G. Dann ist

(H, K) zusammenhängend,

wenn eine der beiden Untergruppen H oder K es ist.

Beweis. Sei H zusammenhängend. Man wende das Kriterium für Zusammenhang auf die Familie der regulären Abbildungen

$$\phi_i: H \longrightarrow G,\ x \mapsto x\bullet i\bullet x^{-1}\bullet i^{-1},\ \text{mit } i \in K$$

an. Ist K zusammenhängend, kann man statt dessen die Familie der

$$\psi_i: K \longrightarrow G,\ x \mapsto i\bullet x\bullet i^{-1}\bullet x^{-1},\ \text{mit } i \in H$$

verwenden.

QED.

9.7 Beispiel

$\mathbf{SO}_n$ ist die Komponente der Eins von $\mathbf{O}_n$.

Beweis. Die Determinante definiert einen Homomorphismus von linearen algebraischen Gruppen,

$$\varphi: \mathbf{O}_n \longrightarrow \mathbf{G}_a = k^*,\ A \mapsto \det(A). \qquad (1)$$

Nun ist die Determinanten einer orthogonalen Matrix A gleich ± 1 (wegen $A^TA = 1$), d.h. das Bild von (1) ist die zweipunktige Mengen $\{\pm 1\}$ und die orthogonale Gruppe zerfällt in die disjunkte Vereinigung von zwei abgeschlossenen Teilmengen

$$\mathbf{O}_n = \varphi^{-1}(1) \cup \varphi^{-1}(-1).$$

Dabei ist $\varphi^{-1}(1) = \mathbf{SO}_n$, d.h. wir können diese Zerlegung in der Gestalt

$$\mathbf{O}_n = \mathbf{SO}_n \cup \mathbf{SO}_n \bullet A$$

schreiben mit einer beliebigen orthogonalen Matrix mit negativer Determinante. Es bleibt zu zeigen, daß

$\mathbf{SO}_n$ zusammenhängend

ist. Zum Beweis wenden wir unser Kriterium für Zusammenhang 9.5 auf die einelementige Familie an, deren einziges Element die folgende reguläre Abbildung ist.

$$S^{n-1}\times...\times S^{n-1} \longrightarrow \mathbf{SO}_n,\ (v_1,...,v_s) \mapsto \varphi(v_1)\bullet ...\bullet \varphi(v_s). \qquad (2)$$

Dabei sei die Anzahl s der direkten Faktoren auf der linken Seite die größe gerade Zahl $\leq$ n und

$$S^{n-1} := \{ x = (x_1,\dots,x_n) \in k^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \}$$

die (n-1)-dimensionale Einheitsphäre (von welcher man leicht zeigen kann, daß es sich um eine irreduzible affine algebraische Varietät handelt). Weiter sei

$$\varphi: S^{n-1} \longrightarrow \mathbf{O}_n,\ v \mapsto s_v\ ,$$

die Abbildung, welche jedem Vektor v der Einheitssphäre die Spiegelung s_v an der zu v senkrechten Hyperebene durch den Ursprung zuordnet. Es ist nicht schwer, einzusehen, daß die Matrix dieser Spiegelung als Einträge reguläre Funktionen in den Koordinaten von v besitzt, d.h. φ ist eine reguläre Abbildung.

Nach dem Satz von Dieudonné ist jede orthogonale Transformation des k^n Zusammensetzung von s Spiegelungen (mit $s \le n$), wobei die Determinante der Transformation genau dann +1 ist, wenn die Anzahl der Spiegelungen gerade ist. Deshalb ist Abbildung (2) wohldefiniert, regulär und surjektiv. Als reguläres Bild einer irreduziblen Varietät ist $\mathbf{SO}_n$ irreduzibel, also zusammenhängend.

QED.

Bemerkungen

(i) Die Details des obigen Beweises findet man (neben einem weiteren Beweis, der sehr viel aufwendiger ist) im Vorlesungsscript zum ersten Kapitel (vgl. 2.2.2 Aufgabe 2).

(ii) Die obige Argumentation zeigt, daß im Fall der $\mathbf{SO}_n$ das bewiesene Zusammenhangskriterium nicht wirklich benötig wird. Im Fall der symplektischen Gruppe Sp_{2n} ist das anders (siehe 2.2.9 Aufgabe 1 (b)).

Inhalt